

## 1 Généralités

### Exercice 1 : Le Flash

Le super-héros Flash a le pouvoir de courir très vite.

- Si il court assez vite pour voir le temps autour de lui ralenti par un facteur 2, à quelle vitesse court-il ?
- En courant jusqu'au repère du méchant, il a compté une distance de 5 kilomètres depuis la ville. Pourtant, une fois arrivés, les policiers ont dit que le repère était à 8 kilomètres de la ville. À quelle vitesse courait le Flash ?

### Exercice 2 : L'élixir de jeunesse

Est-il possible de préserver sa jeunesse en voyageant beaucoup ?

- Expliquer quel phénomène est en jeu lorsque l'on parle de vieillir plus lentement en voyageant.
- En supposant qu'un avion de ligne aille en moyenne à  $900 \text{ km.h}^{-1}$ , de combien de temps est-ce qu'un pilote de ligne retarde son vieillissement pendant une carrière de 30 ans, en faisant 200 vols de 5 h chacun par an ?
- En supposant qu'un métro aille en moyenne à  $30 \text{ km.h}^{-1}$ , de combien de temps est-ce qu'un étudiant prenant le métro 1 h par jour, 200 jours par an pendant 5 ans retarde son vieillissement ?

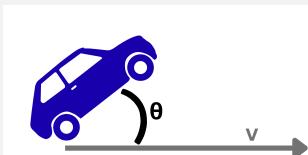
**Exercice 3 : Muons dans l'atmosphère**

Les muons sont des particules produites en haute atmosphère par des rayons cosmiques primaires, à des dizaines de kilomètres de hauteur. Leur durée de vie moyenne au repos est très courte  $\tau_0 \approx 2,196 \times 10^{-6}$  s. Pourtant, il est possible d'observer une très large quantité de muons atteindre le sol.

1. Donner le temps que la lumière met à atteindre le sol depuis une altitude de 10 km. Comparer à la durée de vie moyenne d'un muon.
2. Expliquer pourquoi de nombreux muons atteignent quand-même le sol
3. Supposons qu'un muon se dirige à une vitesse  $v$  vers le sol, depuis une hauteur  $h$ . De son point de vue, combien de temps prend-il à atteindre le sol ?
4. Intéressons nous maintenant à un muon produit à une hauteur  $h = 15$  km, qui se dirige droit vers le sol. L'énergie au repos d'un muon est donnée par  $m_\mu c^2 \approx 105,66$  MeV.
  - (a) Si le muon se désintègre après un temps  $\tau_0$ , de quelle vitesse a-t-il besoin pour atteindre le sol ? De quelle énergie a-t-il besoin ?
  - (b) La probabilité qu'un muon se désintègre après un temps  $t_0$  est donnée par  $P(t \geq t_0) = e^{-t_0/\tau_0}$ . Supposons que le muon ait une énergie  $E = 3.0$  GeV. Quelle est la probabilité qu'il atteigne le sol ?

**Exercice 4 : Hulk**

Hulk est un super-héros avec une super force. Alors qu'il se bat contre un méchant, il attrape une voiture de 4 m de long et la lance à une vitesse  $v = 2 \times 10^8$  m.s $^{-1}$  avec une inclinaison  $\theta = \frac{\pi}{4}$  radians (45 degrés) en direction du méchant. La voiture est illustrée ci-contre.



1. Quelle est la longueur de la voiture que le méchant se prend ?
2. De son point de vue, quel est l'angle que la voiture fait avec le sol ?

## 2 L'Espace de Minkowski

### Exercice 5 : Modéliser un trou noir

On se place dans l'espace de Minkowski. On rappelle que la partie de l'espace-temps à une distance négative de l'origine est appelée l'ailleurs, les deux parties à distance positive sont appelés le passé et le futur en fonction de si le temps est positif ou négatif, la frontière entre le passé et l'ailleurs est appelée le cône lumière passé, et la frontière entre le futur et l'ailleurs est appelée le cône lumière futur.

1. Si un objet massif commence sa trajectoire dans le futur, est-ce qu'il peut y rester à tout jamais ? Est-ce qu'il peut s'en échapper ? Quand est-il de la lumière ?
2. Si un objet massif commence sa trajectoire dans le passé, est-ce qu'il peut y rester à tout jamais ? Est-ce qu'il peut s'en échapper ? Quand est-il de la lumière ?
3. Regardons maintenant un objet massif qui commence sa trajectoire dans l'ailleurs.
  - (a) Est-ce qu'il peut aller dans le futur ?
  - (b) Est-ce qu'il peut aller dans le passé ?
  - (c) Est-ce que il peut rester dans l'ailleurs à tout jamais en étant au repos ?
  - (d) Est-ce qu'il peut rester dans l'ailleurs à tout jamais en général ?
4. Considérons maintenant de la lumière qui commence sa trajectoire dans l'ailleurs
  - (a) Est-ce qu'elle peut aller dans le futur ? Dans le passé ?
  - (b) Est-ce qu'elle peut rester dans l'ailleurs ?

Le cône de lumière futur modélise très bien la surface d'un trou noir, tandis que le cône de lumière passé modélise très bien la surface du trou blanc associé

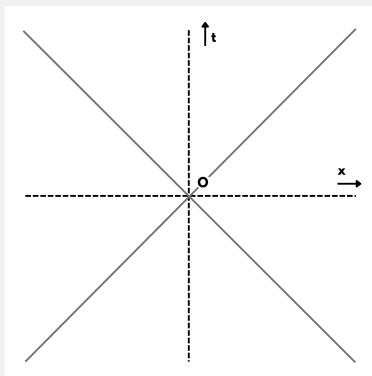
### Exercice 6 : Coincer la lumière

On se place dans l'espace-temps de Minkowski en deux dimensions, c'est à dire avec une dimension temporelle et une dimension spatiale. Quelles sont les trajectoires possibles d'un objet sans masse tel que la lumière ? C'est le phénomène de découplage, fondamental dans les théories en deux dimensions sans masses<sup>a</sup>.

a. En réalité, la théorie ne doit avoir aucune échelle de distance pour être complètement découpée. On appelle cela une théorie conforme.

**Exercice 7 : Géométrie dans l'espace de Minkowski**

Considérons un diagramme de l'espace-temps de Minkowski en 2 dimensions, représenté ci-contre.



On rappelle que les longueurs dans l'espace-temps de Minkowski sont données par l'intervalle de Lorentz. Soit  $L$  une longueur positive donnée.

1. Tracer un " cercle" de longueur  $L$  ayant pour centre l'origine, c'est à dire l'ensemble des points à une distance  $L$  de l'origine.
2. Quels sont les triangles équilatéraux de longueur  $L$ , c'est à dire les ensemble de trois points tel que chaque point est à une distance  $L$  des deux autres ?

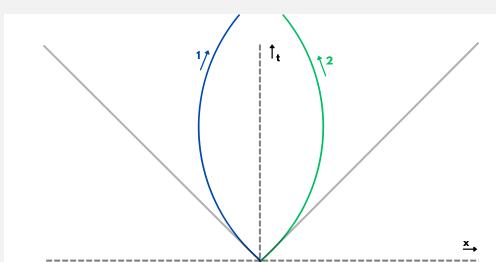
**Indices :** 1. Tracer des cercles ayant pour centre des points du premier cercle.

### 3 Trajectoires et Mouvement

#### Exercice 8 : Trajectoires non-galiléennes

**Attention :** La question (2) nécessite de savoir écrire une intégrale. Les questions (1) et (3) sont indépendantes et ne demandent aucune connaissances supplémentaires.

Nous sommes au milieu d'un long voyage à bord d'un vaisseau spatial, et deux de nos amis veulent s'amuser. Ils prennent chacun une petite navette, font une balade, puis reviennent en même temps. Dans notre référentiel, ils ne se sont déplacés que selon l'axe  $x$ , et ont fait deux trajectoires exactement opposées. En d'autres termes, la trajectoire de l'un est le symétrique de l'autre par rapport à notre axe du temps. Les deux trajectoires sont illustrées dans la figure ci-dessous, dans notre référentiel.



1. Pour les questions (1) à (3), on suppose que le vaisseau spatial soit un référentiel galiléen. À leur retour, lequel de nos deux amis a le plus vieillit ?
2. Supposons que chaque navette soit partie avec une vitesse initiale  $v_0$ , puis ait accéléré d'une accélération constante dans notre référentiel  $a$ , de sorte à ce que la trajectoire bleue soit donnée dans notre référentiel par  $x_{\text{bleu}}(t) = -v_0 t + \frac{a}{2} t^2$ .
  - (a) Au bout de combien de temps reviennent-ils de notre point de vue ?
  - (b) Combien de temps s'est écoulé de leur point de vue ? (On ne demande pas de calculer l'intégrale obtenue)
3. On ne suppose désormais plus que le vaisseau spatial soit un référentiel galiléen. À la place, on suppose qu'il ait une trajectoire telle que le référentiel propre de notre ami en bleu soit un référentiel galiléen. Dans ce cas, à leur retour, lequel de nos deux amis a le plus vieillit ?

#### Exercice 9 : Des horloges qui voyagent

En 1971, Hafele et Keating ont essayé de mesurer les effets de la relativité restreinte en synchronisant plusieurs horloges atomiques puis en envoyant certaines des horloges faire le tour du monde soit vers l'est soit vers l'ouest, tout en gardant le reste des horloges sur place. Une fois toutes les horloges revenues, ils se sont rendus compte que les horloges parties vers l'est avaient accumulé du retard comme attendu, mais que celles parties vers l'ouest avaient accumulé de l'avance contrairement à ce qui était attendu. Pourquoi ?

**Exercice 10 : Superman**

Superman a le pouvoir de voler très vite, mais son ennemi a aussi des réflexes très rapides. Pour essayer d'en finir avec lui, Superman achète une lance, s'envole sur la lune, puis fonce droit sur son ennemi à une vitesse de 50% de la vitesse de la lumière, en lançant sa lance aussi à une vitesse de 50% de la vitesse de la lumière. À quelle vitesse la lance fonce-t-elle sur l'ennemi ?

**Exercice 11 : Compétition alien**

Deux vaisseaux extraterrestres foncent droit sur la Terre pour la conquérir, en arrivant de directions perpendiculaires, tous deux à une vitesse de 90% la vitesse de la lumière. Dans le référentiel d'un des vaisseaux, à quelle vitesse va l'autre vaisseau ?

**Exercice 12 : Accélération dans une accélération**

Nous sommes sur le quai d'une gare, et nous regardons notre ami jouer avec une voiture télécommandée dans le train. Le train est en train de partir, et possède une accélération propre  $\vec{a}_{\text{train}}$ . En même temps, notre ami accélère sa voiture télécommandée d'une accélération qu'il observe être constante  $\vec{a}_{\text{voiture}}$ . On suppose que le train et la voiture démarrent en même temps, et vont dans le même sens. Le but de l'exercice est d'obtenir l'accélération de la voiture télécommandée dans notre référentiel.

1. Paramétriser la trajectoire dans l'espace-temps de la voiture dans le référentiel du train, en fonction d'un paramètre quelconque.
2. En déduire l'expression des quadrivecteurs position, vitesse et accélération de la voiture dans le référentiel du train, en fonction du paramètre quelconque.
3. Transformer ces quadrivecteurs pour donner leur expression dans notre référentiel, en fonction de  $\vec{a}_{\text{train}}$  et  $\vec{a}_{\text{voiture}}$ .
4. Donner une expression générale des quadrivecteurs vitesse et accélération de la voiture dans notre référentiel, en fonction de la vitesse que l'on perçoit et de l'accélération que l'on perçoit de la voiture.
5. Expliquer comment obtenir l'accélération de la voiture télécommandée dans notre référentiel en fonction de notre temps propre.

**Exercice 13 : Couleur des galaxies**

On observe une galaxie, et on la voit absorber de la lumière verte à une longueur d'onde d'environ 550 nm. Pourtant, des scientifiques présents nous assurent que la constitution de cette galaxie lui fait absorber de la lumière bleue à une longueur d'onde d'environ 450 nm. À quelle vitesse est-ce que la galaxie va par rapport à nous ?

## 4 Énergie

### Exercice 14 : Dans la télévision

Dans certains anciens modèles de télévision, des électrons étaient créés par des filaments puis lancés contre un écran de phosphore pour générer l'image. Pour ce faire, les électrons passaient à travers une différence de tension de 50 kV. On rappelle que par définition, un électron gagne une énergie cinétique de 1 eV par différence de tension de 1 V traversée. On donne l'énergie au repos d'un électron  $E_e = 511 \text{ keV}$ , et on suppose que les électrons sont au repos avant de traverser la tension.

1. En se restreignant à la mécanique classique, quelle est la vitesse atteinte par les électrons après avoir traversé la tension ?
2. Quelle est la réelle vitesse atteinte, en utilisant la relativité restreinte ?
3. En supposant que les électrons traversent 50 cm entre le moment où ils sont créés et le moment où ils atteignent l'écran, est-il utile de prendre en compte les effets relativistes ?

### Exercice 15 : Correction de l'énergie cinétique

Étant donné une fonction  $f$ , on a de manière générale

$$f(x) \approx f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2}x^2f''(0) + \dots + \frac{1}{n!}x^n f^{(n)}(0)$$

pour  $x$  proche de 0, où  $f^{(n)}$  est la dérivée  $n$ -ième de  $f$ , et où  $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2$ . En considérant un objet allant à une vitesse beaucoup plus petite que la lumière, retrouver la formule de l'énergie cinétique et rajouter un terme de correction relativiste à l'énergie cinétique, proportionnel à  $v^4$ .

**Exercice 16 : Annihilation de protons et antiprotons**

Dans un laboratoire, nous observons un proton  $p$  et un antiproton  $\bar{p}$  s'annihiler en deux photons :

$$p + \bar{p} \longrightarrow \gamma + \gamma \quad (1)$$

On note  $m_p$  la masse du proton, qui est égale à la masse de l'antiproton.

1. Supposons que dans notre référentiel, les deux particules sont au repos.
  - (a) Expliquer dans quelle sens les photons sont émis, l'un par rapport à l'autre.
  - (b) Déterminer l'énergie des photons.
  - (c) En déduire la longueur d'onde de la lumière émise.
2. Supposons maintenant que le proton est au repos dans le laboratoire, tandis que l'antiproton arrive avec une énergie totale  $E_{\bar{p}}$ . Supposons aussi que les deux photons sont émis dans la même direction que le mouvement de l'antiproton.
  - (a) Calculer la masse totale invariante du système.
  - (b) Expliquer pourquoi le centre de masse de l'expérience constitue un référentiel galiléen.
  - (c) Donner l'énergie de chaque photon dans le référentiel du centre de masse.
  - (d) Donner l'énergie de chaque photon dans notre référentiel.
  - (e) En déduire la longueur d'onde de chaque rayon de lumière émis, de notre point de vue.

**Exercice 17 : Désintégration de neutrons**

Dans notre laboratoire, nous observons un neutron  $n$  au repos se désintégrer en un proton  $p$ , un électron  $e$  et un anti-neutrino  $\bar{\nu}$

$$n \longrightarrow p + e + \bar{\nu} \quad (2)$$

Nous donnons les énergie au repos d'un neutron, d'un proton et d'un électron

$$m_n c^2 = 939,6 \text{ MeV}$$

$$m_p c^2 = 938,3 \text{ MeV}$$

$$m_e c^2 = 0,5110 \text{ MeV}$$

L'énergie au repos d'un anti-neutrino quant à elle est négligeable devant celle des autres particules,  $m_{\bar{\nu}} c^2 \leq 7,3 \text{ eV}$ .

1. Donner l'expression et la valeur de l'énergie maximale  $E_{\max}$  que l'électron émis peut avoir.
2. Donner l'expression et la valeur de la vitesse de l'anti-neutrino émis dans le cas où l'énergie de l'électron est  $E_{\max}$ .